→ Dénombrement :

Evenement aléatoire :

historiquement, la notion de Prob s'est dégagée a partir d'exemples simples ~~toujours~~ empruntés au jeux de hasard (le mot hasard vient de l'arabe az-zahr = le dé النرد)

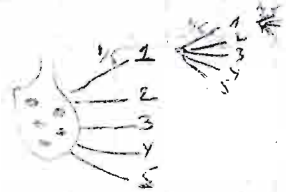
Définition	Exemple
• Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.	L'expérience du jet d'un dé cubique ordinaire. résultat = nombre sur la face supérieure
• On lui associe un univers appelé ensemble fondamental "Ω" (résultats possibles)	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Card ($\Omega$) = 6.
• Evenement aléatoire : est sous-ensemble A de Ω	Evenement A : "obtenir un nombre pairé. A = {2, 4, 6} . Card (A) = 3
• On dit que A est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à A.	Si la face supérieure indique 5, A n'est pas réalisé. $P(A) = \frac{\text{Nbr des cas Favorable}}{\text{Nbr " " possible}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

• Exemple : Une urne contient 5 ($n=5$) boules de 1 à 5. On veut calculer le nombre des cas possibles de tirer 3 ($K=3$) boules ~~aléatoirement~~.

1. Le tirage est successif avec remise :

K-liste = 3 liste $= n^K = 5^3 = 125$ les cas possibles

[illegible] تكرار



$P(A) = 1/5 \cdot 1/5 \cdot 1/5 = \frac{1}{125}$

بدون تكرار

2. Le tirage est successif sans remise : Arrangement : $A_5^3 = A_n^k$

• les cas possibles $= 5 \times 4 \times 3 = 60$ cas.

$= n(n-1)\ldots(n-K+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$

$$\rightarrow \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

$$P(A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = 1/60$$

• Si le nombre des boules tirés = 5 ou une permutation : $P = 5! = 120$ cas.

Rq : Si :

• La Combinaison = لا يهم الترتيب

• L'arrangement = يهم الترتيب

3 - Tirage Simultanément : on a une combinaison : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\rightarrow C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{3! \; \cancel{2!}} = \frac{60}{6} = 10$$

1 Combinaison → $k!$ Arrangement

$C \rightarrow A$

$$\boxed{C = \frac{A}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

→ Définitions :

• **K-liste** : Soit E un ensemble de n éléments, une K-liste est une liste ordonnée de K élément de E avec répétition possible.

EX : E = {1 . 2 . 3 . A , B} Correspondant aux différents touches d'un clavier dont le code est une succession de 3 caractères. Combient y-a-t-il de code différents ? → On a $5^3 = 125$ codes différents.

• **L'arrangement** = الترتيبة : c'est une dispertion ordonnée d'un certain nombre d'éléments de E. Deux arrangements se distinguent par l'ordre et le nombre d'élément qu'il le composent.

EX ① : On a 6 lettres (a, b, c, d, e, f). quel est le nombre de mots de 03 lettres avec des lettres distincts que l'on peut former ?

$$\longrightarrow A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ Cas.}$$

EX ② :

Combien de nombre de 3 chiffres peut on ecrire avec des chiffres impaires tous distinct ? → chiffres impaire {1, 3, 5, 7, 9}

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ Cas.}$$

• **Permutation** = تبديلة : c'est une dispertion ordonnée de Tous les éléments de E. Deux permutations se distinguent par l'ordre des éléments qui le composent.

EX : Dans une présentation orale, 8 éléments doivent faire leurs présentation

ET → *

OU → +

le tirage est organiser pour déterminer l'ordre dans lequel les élèves passeront leurs orales. Combient y a-t-il de possibilité pour l'ordre de passage ? → On a : $8! = 40320$ Cas.

• **La Combinaison** : Correspond à un sous-ensemble d'éléments non ordonnés dans d'1 E en d'autre terme on ne tient pas compte de l'ordre.

EX : Dans 1 groupe de Master 1 (20 étudiants), on décide de former un comité de 02 étudiants pour les représenter auprès de l'administration. Quel est le nombre de cas possibles ?

$$\longrightarrow C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\,(20-2)!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{2! \times 18!} = 190 \text{ Cas.}$$

• Si parmis les 2 étudiant 1 soit président et l'autre vice président ?

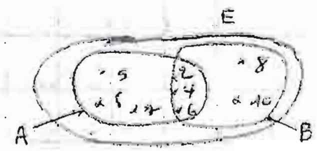
$$\longrightarrow \text{On a } A_{20}^2 = 20 \times 19 = 380 \text{ Cas.}$$

04-02-2018

Calcul des probabilité :

1/ opérations ensemblistes :

Exemple :



• $A = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

• $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

• $A \cap B = \{2, 4, 6\}$, $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

• $\bar{A}$ = Complément = $\{8, 10\}$, $A \cup \bar{A} = E$, $A \cap \bar{A} = \phi$.

→ $A \cup B$: les éléments appartenants à A ou B

→ $A \cap B$: " " " " A et B.

- Propriétés :

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap B = \phi \Rightarrow$ A et B sont disjoint.

→ Card (A) = 6 • Card (B) = 5 • Card (A∩B) = 3 • Card(A∪B) = 8

→ $\boxed{\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)}$

Si $\boxed{\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)}$ ⟹ (A et B sont disjoint.)

- Exemple :

Dans une classe tout les élèves étudient au mois l'anglais et Allemand. 30 Étudient Anglais, 20 étudient l'allemand, 15 étudient les deux langues.

→ Quel est le nombre d'élèves ?

- Card (A) = 30 • Card (B) = 20 • Card(A∩B) = 15.

→ A ∪ B = E , Card (E) = Card (A∪B).

$= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

$= 30 + 20 - 15 = 35$.

- Exe 2 :

Dans l'expérience de jet d'un Dé on a l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A, B, C trois évènements : A l'apparition d'un nbr Pair

B " " inpair.

C " " Premier.

→ A = {2, 4, 6}
→ B = {1, 3, 5}
→ C = {2, 3, 5}

→ • A ∪ C = {2, 3, 4, 5, 6} → Pair ou Premier
• B ∩ C = {3, 5} → inpair et Premier
• $\bar{C}$ = {1, 4, 6} → Nbr non premier.
• A ∩ B = ϕ → l'apparition d'1 Nbr Pair et impair

(A et B sont incompatible)

2/ Axiome de Probabilité :

→ $0 \leq P(A) \leq 1$.

→ $P(\Omega) = 1$ → certain.

→ $P(\phi) = 0$ → impossible.

→ $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

→ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

→ $A \cap B = \phi$ (A et B sont incompatibles) → $\boxed{P(A \cap B) = P(\phi) = 0}$

→ $A \cap \bar{A} = \phi$, $A \cup \bar{A} = \Omega$

→ $P(A \cap \bar{A}) = 0$ → $P(A \cup \bar{A}) = 1$.

→ $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) - P(A \cap \bar{A}) = 1$.

⟹ $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$.

→ Deux évènements A, B sont incompatibles ⟺ $\begin{cases} P(A \cap B) = 0 , \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$

3) Probabilité Conditionnelle :

Exemple :

On choisit au hasard un élève dans une classe.

Soit M " L'élève est fort en Math " $\quad p(M) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Soit F " L'élève est fort en Français ". $\quad P(F) = \frac{2}{3}$

$M \cap F$: " L'élève est fort en Math et en Français ".

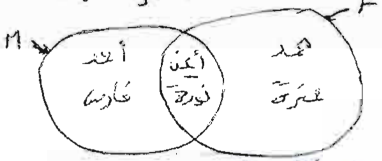
P(M) est la probabilité que l'élève choisit fort en Math.

P(F) est " " " " " " Français.

P(M/F) = la " " " " fort en Math sachant qu'il est fort en français.

F. $\quad P(F) = \frac{4}{6}$

M



. $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

. $P(A/B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$ $\quad \boxed{\frac{2}{4}}$

$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{2/6}{4/6} =$

→ Définition : Soient A et B, 2 événements avec $P(B) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant de B est la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est réalisé.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\longrightarrow P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)}$$

Ex : La classe 30. 12 fort en Français et 10 fort en Math. et 07 fort en deux.

. $P(M) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

. $P(F) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

. $P(M \cap F) = \frac{7}{30}$.

$\longrightarrow P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{7/30}{2/5} = \frac{7}{30} \times \frac{5}{2} = \frac{7}{12}$.

. Propriétés :

- $0 \leq P(A/B) \leq 1$
- $P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/B)$.
- $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

. Événements indépendants :

. Si $P(A/B) = P(A)$ donc A et B sont É.I.

$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\longrightarrow$ $(P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B))$ → Événements Indépendants.

. Si A et B sont Indépendants alors :

- $\bar{A}$ et B " " " .
- A et $\bar{B}$ " " " .
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ " " " .

Ex : $E = \{1, 2, 3, 4\}$; A, B, C trois événements ;

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$.

→ Montrer que : A et B sont I, B et C sont I, A et C sont I, mais A, B, C ne sont pas I.

Sol : $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4}$.

$A\cap B = \{2\} \longrightarrow P(A\cap B) = 1/4$

$(A\cap C) = \{1\} \longrightarrow P(A\cap C) = 1/4$

$(B\cap C) = \{3\} \longrightarrow P(B\cap C) = 1/4$

$\longrightarrow P(A\cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{4} \longrightarrow$ A et B sont I.

$\longrightarrow P(A\cap C) = P(A).P(C) = \frac{1}{4} \longrightarrow$ A et C sont I.

$\longrightarrow P(B\cap C) = P(B).P(C) = \frac{1}{4} \longrightarrow$ B et C sont I.

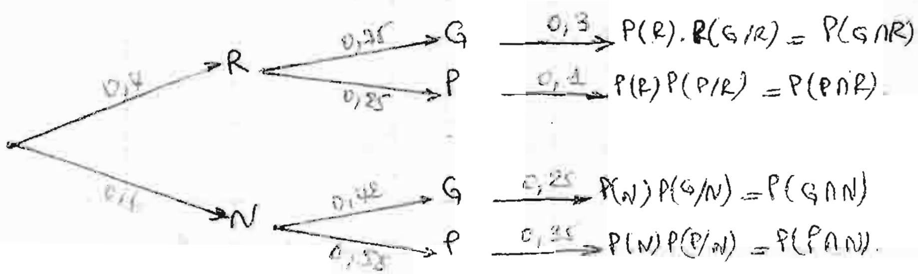
. $A\cap B\cap C = \emptyset \longrightarrow P(A\cap B\cap C) = 0$

$P(A)P(B)P(C) = 1/8$ Donc : A, B et C ne sont pas I.

Ex2 : on tire au hasard une boule dans une urne contenant des boules noires et rouges. l'urne contient 40 % boules rouges.

Parmi les boules rouges 75 % sont gagnantes et 25 % de boules sont noires et gagnantes.

Sol :

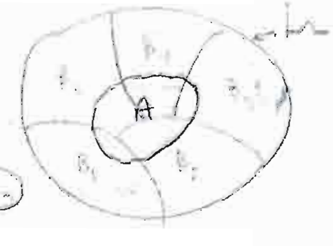


$\longrightarrow P(G) = P(G\cap R) + P(G\cap \bar{R}) = 0,3 + 0,25 = 0,55$.

4) Loi des probabilités totales :

. Définition :

une partition de l'univers Ω est un ensemble de parties de Ω 2 à 2 disjoint dont la réunion est Ω.



$\longrightarrow A\cap\Omega = A = A\cap(B_1\cup B_2 \ldots \cup B_5)$.

$= (A\cap B_1)\cup(A\cap B_2) \ldots \cup(A\cap B_5)$.

$\longrightarrow P(A) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) \ldots + P(A\cap B_5)$.

$\longrightarrow B\cup\bar{B} = \Omega$

. $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\bar{B})$

$P(A) = P(B).P(A/B) + P(\bar{B}).P(A/\bar{B})$

Remarque :

B et $\bar{B}$ forment toujours l'univers Ω.

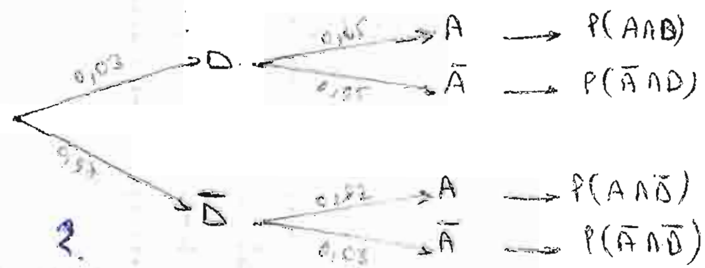
Ex6 :

. D : le boulon présente un défaut.

. $\bar{D}$: " " ne présente pas de défaut.

. A : le boulon est accepté.

. $\bar{A}$: le boulon est refusé.



1. $P(A/D) = 0,05$

2. $P(\bar{A}/\bar{D}) \overset{?}{=} 0,08$

3. $P(E) = 0,05 + 0,08 = 0,13$

$P(D/A) = \frac{P(A\cap D)}{P(A)}$

$P(\bar{D}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{D})}{P(\bar{A})}$

$P(A) = P(A\cap D) + P(A\cap\bar{D})$

$=$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$\Rightarrow P(D/A) =$

$P(\bar{D}/\bar{A}) =$

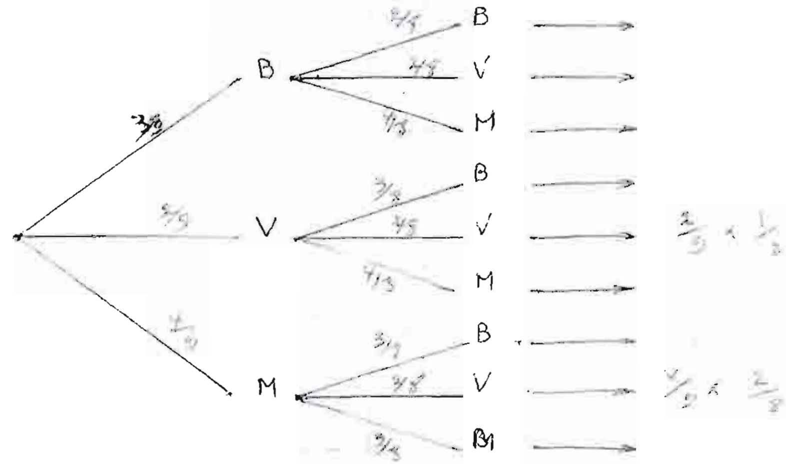
$P(E) = 0,083$ / 8,3 %

TD 01 – Suite TD 1.

11.02.2018

1 – $\frac{2}{9} = 0,22$.

2 –



3 – $\frac{4}{9} \times \frac{2}{8} =$

4 – $\left(\frac{3}{9} \times \frac{2}{8}\right) + \left(\frac{2}{9} \times \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{4}{9} \times \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{3} =$

Ex 3 =

→ Personnes → Combinaison → C.

Ex N° 4 TD

(1)

(2) $\frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{15}{28} = 0,537$.

TD 2 =

Ex 1. B et $\bar{B}$ forment une partition.

1) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ → Loi des Prob. totale.

$= P(B) \times P(A/B) \times P(\bar{B}) \times P(A/\bar{B})$

$= 0,4 \times 0,5 \times 0,6 \times 0,3$

$P(A) = 0,38$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0,38 + 0,4 - 0,2 = 0,58$.

• $P(B/\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B)/P(\bar{A}) = \frac{P(B)\,P(\bar{A}/B)}{1 - P(A)} = \frac{0,38}{0,62} = 0,29$

• $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - 0,58$

$= 0,42$.

18/02/2018

Ex 2 =

$P(A) \cap (B \cup C)) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B \cup C)$.

$= P((A \cap B) \cup (A \cap C))$

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))$

$= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$= P(A)\,[P(B) + P(C) - P(B) \cdot P(C)]$

$= P(A) \cdot P(B \cup C)$

Alors A Indépendant $\cap$ $(B \cup C)$.

EX 05 S2

$P(A) = 0{,}75 \longrightarrow P(\bar{A}) = 0{,}25$

$P(B) = 0{,}40 \longrightarrow P(\bar{B}) = 0{,}60$

$P(\bar{A}/B) = 0{,}25 \longrightarrow P(A/B) = 0{,}75$.

$\longrightarrow P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \overset{?}{=} P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

- $P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0{,}25 \cdot 0{,}60 = 0{,}15$ ——— ①
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - (P(A/B) \cdot P(B))$

$= 0{,}75 + 0{,}40 - 0{,}3 = 0{,}85$.

$\longrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$ ——— ②

De ① et ②, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont I.

EX 03 S2

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) = 0{,}75$.

Alors : A et B sont I. ($P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.)

$\Longrightarrow \bar{A}$ et $\bar{B}$ sont I.

EX 04

① $\longrightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} = \frac{1/5}{1/3} = \boxed{\frac{3}{5}}$

$\longrightarrow P(\bar{A}/B) = 1 - 3/5 = \boxed{\frac{2}{5}}$

$\longrightarrow P(A \cap \bar{B} / B) = \frac{P(A \cap \bar{B} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(A)} = \boxed{0}$

$\longrightarrow P(A \cap B / B) = \frac{P(A \cap B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A/B) = \frac{3}{5}$.

$\longrightarrow P((A \cup B) / A \cap \bar{B}) = \frac{P((A \cup B) \cap (A \cap \bar{B}))}{P(A \cap \bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A \cap \bar{B})} = 1$.

$(A \cup B) \cap (A \cap \bar{B}) = (A \cap A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B \cap \bar{B}) = (A \cap \bar{B}) \cup \emptyset$.

$= (A \cap \bar{B})$

$\longrightarrow P(B \cap \bar{A} / B \cup \bar{A}) = \frac{P((B \cap \bar{A}) \cap (B \cup \bar{A}))}{P(B \cup \bar{A})}$

$= \frac{P((B \cap \bar{A} \cap B) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{A}))}{P(B \cup \bar{A})} = \frac{P((B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}))}{P(B \cup \bar{A})}$

$= \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(B \cup \bar{A})} = $

2 – $[P(A) \cdot P(B) = 1/12] \neq [P(A \cap B) = 1/3] \longrightarrow$ ne sont pas Indépendants.

ou $[P(A/B) = \frac{3}{5}] \neq [P(A) = 1/4]$

$P(A \cap B) = 1/5 \neq 0 \longrightarrow$ A et B ne sont pas incompatibles.

EX 05

$P(A \cup B) = 0{,}45 \longrightarrow (1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}))$.

$P(A \cap B) = 0{,}25 \longrightarrow (P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B))$ -

$\longrightarrow P(A \cup \bar{B}) \overset{?}{=} P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B})$.

• B et $\bar{B}$ forment une partition. alors :

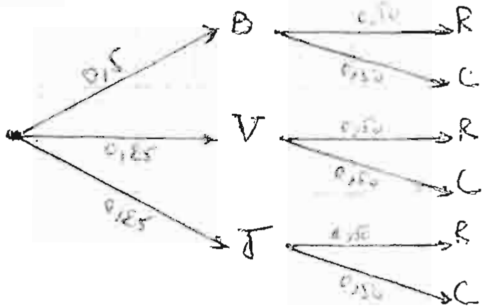
$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap \bar{B}) \longrightarrow P(A\cap \bar{B}) = P(A) - P(A\cap B)$

$= 0,4 - 0,25 = 0,15$

$\longrightarrow P(A\cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A\cap \bar{B})$

$= 0,4 + 0,7 - 0,15 = 0,95$.

Expl : A, B et C forment une partition.



$\longrightarrow P(B\cap R) = 0,25$

$\longrightarrow P(B\cap C) = 0,25$

$\longrightarrow P(V\cap R) = 0,125$

$\longrightarrow P(V\cap C) = 0,125$

$\longrightarrow P(J\cap R) = 0,125$

$\longrightarrow P(J\cap C) = 0,125$

$\longrightarrow P(R) = P(B\cap R) + P(V\cap R) + P(J\cap R)$

$= 0,25 + 0,125 + 0,125 = 0,5$

$\boxed{P(R) = 0,5}$

→ Formule de Bayes :

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(B)}}$$

• $P(A)$ = Probabilité à priori.

• $P(A/B)$ = " à postériori.

Exemple : Dans un laboratoire on a fait les constats suivants :

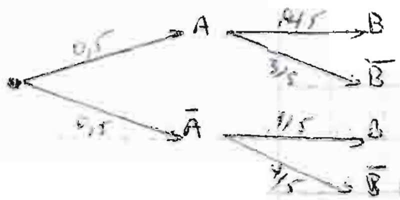
- Si une souri porte l'anticorp A, Alors 2 fois sur 5 elle porte elle porte aussi l'anticorp B $\longrightarrow P(B/A) = 2/5$
- " " ne porte pas " $A(\bar{A})$, 4 fois sur 5 elle ne porte pas l'anticorp B $(\bar{B})$ $\longrightarrow P(\bar{B}/\bar{A}) = 4/5$

→ La moitiée de la population porte l'anticorp A $\longrightarrow \boxed{P(A) = 0,5}$

①. Quelle est la Probabilité que, si une souri port B, elle port aussi A

②. " " " " ", si " " B, ne port pas A. $(\bar{A})$

Sol :



$\longrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{5}$

$\longrightarrow P(A\cap \bar{B}) =$

$\longrightarrow P(\bar{A}\cap B) = 1/10$

$\longrightarrow P(\bar{A}\cap \bar{B}) =$

. A et $\bar{A}$ forment partition.

$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \bar{A}) = 1/5 + 1/10 = \frac{3}{10}$

① Formule de Bayes :

$$P(A/B) = \frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(B)} = \frac{1/2 \cdot 2/5}{3/10} = \frac{2}{3}$$

② $$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A})\cdot P(B/\bar{A})}{P(B)} = \frac{P(\bar{A})\cdot [1 - P(\bar{B}/\bar{A})]}{P(B)}$$

$$= \frac{1/2 \cdot 1/5}{3/10} = \frac{1}{3}$$

2ème exemple des urnes (A_1 et A_2)

$\longrightarrow P(A_1/B)$? $$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2)}$$

Les Variables aléatoires (VA) =

1/ Déf = On appelle VA le résultat d'une épreuve (expérience) aléatoire. lorsque l'issue de celle-ci peut être représentée par un nombre (X, Y)

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow X(\omega).$$

exemple =

Si l'on considère la constitution d'une fratrie de 2 enfants l'espace fondamental des évènements = $\Omega = \{GG, FF, GF, FG\}$.

X : "nombre de fille dans la famille" $\longrightarrow X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

I\ V.A Discrète =

On appelle VAD une VA, qui ne prend que des valeurs ponctuelles (entières)

→ Resultat d'un jet de dé $= X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1 _ Loi de Probabilité d'une VAD =

La loi de P d'1 VAD. X est une Probabilité P(X) défini par l'application =

$$P_x : X(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$
$$x_i \longrightarrow P(x_i) \Leftrightarrow P(X = x_i).$$

→ jet du dé =

$X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

→ exemple des fratrie =

$X(\Omega)$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

2 _ Paramètres d'une loi de Probabilité =

1 _ L'esperance mathématique = (الأمل الرياضي = المتوقع)

L'esperance mathématique $E[X]$ d'une VAD correspond à la moyenne espéré lors d'une réalisation de la VA.X.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} P_i x_i = \sum x_i P(X = x_i)$$

→ exemple jet du dé =

$$E[X] = 1 \times 1/6 + 2 \times 1/6 + 3 \times 1/6 + 4 \times 1/6 + 5 \times 1/6 + 6 \times 1/6.$$
$$= 1/6\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$$
$$E[X] = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

→ exemple Fratrie =

$$E[X] = 0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 2 \times 1/4 = 1$$
$$E[X] = 1.$$

25 - 02 - 2018

2. La Variance = (الانحراف المعياري)

La variance mesure la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $E[X]$

$$V[X] = E[(X - E[X])^2]$$
$$= \sum P_i (x_i - E[X])^2 = \sum P_i x_i^2 - 2 \sum P_i x_i E[X] + \sum P_i E[X]^2$$
$$\boxed{V[X] = E[X^2] - E[X]^2} \longleftarrow = E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2$$

3 _ L'ecart _ type =

Pour mesurer la dispertion d'VA. X on considère souvent en statistique l'écart_type lié ~~par~~ à la variance par =

$$\sigma_X = \sqrt{V[X]}$$

* $E[aX+b] = a.E[X] + b$
* $V[aX+b] = a^2.V[X]$.
* $\sigma[aX+b] = |a| . \sigma[X]$.

1-3- Fonction de répartition :

Une loi de Probabilité est souvent définie à partir de sa fonction de répartition $F(x)$:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x_i \longrightarrow F(x) = P[X \leq x_i].$$

$$P[X \leq x_i] = P[X = x_1] + P[X = x_2] + \text{——} + P[X = x_i]$$

* **Propriétés :**

- F est une fonction en escalier avec : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1 \end{cases}$

- F est une fonction croissante.

- $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$: $F(b) - F(a) = P[a < X \leq b]$.

- **Exemple :**

On jet 2 dés ; on désigne par X la V.A " Somme de 2 nombre ".

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	\
$P(X=x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	\
$F(x_i)$	1/36	1/12	1/6	5/18	5/12	7/12	26/36	30/36	33/36	35/36	1	\

- $E[X] = \sum P_i x_i$

$$= 2 \times 1/36 + 3 \times 2/36 + \text{——} \quad \text{——} + 12 \times 1/36$$
$$= \frac{257}{36}$$

- $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$$= \left(2^2 \times 1/36 + 3^2 \times \frac{2}{36} + \text{——} \; 12^2 . \frac{1}{36}\right) - \left(\frac{257}{36}\right)^2$$
$$= \frac{1974}{36} - \left(\frac{257}{36}\right)^2$$
$$= 4, \text{——}$$

- $\sigma[X] = \sqrt{V[X]} = \sqrt{4, \text{—}}$

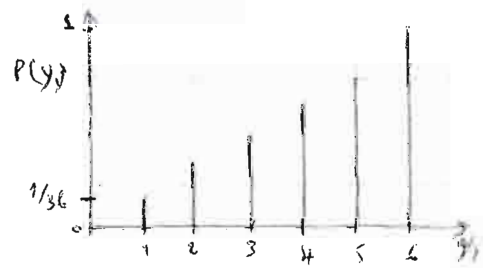
$$= 2, \text{——}$$

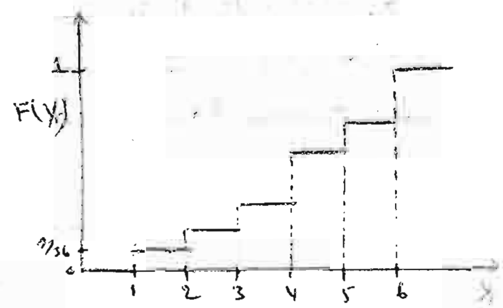
$\longrightarrow$ Y = " Max des 2 nombres ".

$Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

y_i	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36
$F(y_i)$	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1

- $E[Y] = \sum P_i y_i =$
- $V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 =$
- $\sigma[Y] = \sqrt{V[Y]}$





1-4- Couple de VA : 1.4.1- Définition =

On appelle loi de Probabilité d'un Couple (X, Y) ; l'application P_{XY} de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui à chaque Couple d'événements (x, y) associe la Probabilité = $\boxed{P_{XY}(x,y) = P[X = x, Y = y]}$

où $(X = x, Y = y)$ désigne $(X = x) \cap (Y = y)$.

1-4-2- loi marginale =

Soit (X,Y) un Couple aléatoire discret. on appelle loi marginale de X l'application P_X de $X(\Omega)$ dans $[0,1]$ définie Pour tous $x \in X(\Omega)$ Par =

$$P_X(x) = P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{XY}(x, y)$$

1-4-3- Indépendance des VAD =

Soit (X, Y) un Couple aléatoire discret, X et Y sont indépendants Si = $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$; $P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$.

- Si X et Y sont 2 VAD indépendants alors =
  - $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$
  - $V[X+Y] = V[X] + V[Y]$

!!! Exemple = on jet 2 dés =

X : " Max de 2 nombres "

Y : " min de 2 nombres "

→ Determiné P_{XY} !

Sol =

P_{XY}	1	2	3	4	5	6
1	1/36	0	0	0	0	0
2	2/36	1/36	0	0	0	0
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36

→ les lois marginales =

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_X(x_i)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

y_i	1	2	3	4	5	6
$P_Y(y_i)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

→ X, Y indépendance ?

$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$: $P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$.

$P_{XY}(1,1) = 1/36$

$P_X(1) = 1/36$ et $P_Y(1) = \frac{11}{36}$

$P_X(1) \cdot P_Y(1) = \frac{1}{36} \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{36^2}$

Alors = $P_{XY}(x,y) \neq P_X(x) \cdot P_Y(y)$.

→ X, Y ne Sont pas indépendance.

Exemple 2 = un Sac Contient 3 boules numérotées 1, 2 et 3 on extrait successivement et sans remise 2 boules, on note X (respectivement Y) la VA associé au résultat du Premier ($2^{ème}$) tirage.

1/ decrire Ω, Determiner $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$.

2/ Déterminer la loi du couple (X, Y) ?

3/ En déduire les lois marginales de X et Y ?

4/ X et Y sont-elles indépendantes ?

5/ Calculer $E[X]$, $E[Y]$, $V[X]$, $V[Y]$?

Sol :

1/ $A_3^2 = 6$ cas.

$\Omega = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1), (3,2)\}$.

$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

2/ Loi de couple : 3/

P_{XY}	1	2	3
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

x_i	1	2	3
$P_X(x_i)$	2/6	2/6	2/6

y_j	1	2	3
$P_Y(y_j)$	2/6	2/6	2/6

4/ $P_X(1) = \frac{2}{6}$, $P_Y(1) = \frac{2}{6}$, $P_{XY}(1,1) = 0$

$P_{XY}(1,1) \neq P_X(1) \cdot P_Y(1) \longrightarrow X, Y$ ne sont pas In…

5/

- $E[X] = \sum P_i x_i = \frac{2}{6}(1+2+3) = 2$.
- $E[Y] = \sum p_j y_j = \frac{2}{6}(1+2+3) = 2$
- $V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 1^2 \times 2/6 + 2^2 \cdot 2/6 + 3^2 \cdot 2/6 - 4 = \frac{2}{3}$
- $V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = 1^2 \times 2/6 + 2^2 \times 2/6 + 3^2 \cdot 2/6 - 4 = \frac{2}{3}$

Ex 1 : $\Omega = \{(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)\}$.

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

x_i	0	1	2
$P_X(x_i)$	1/4	2/4	1/4

$P(X=0) = P(F,F) = 1/4$

$P(X=1) = \{P(F,P), P(P,F)\} = \frac{2}{4}$.

$P(X=2) = P(P,P) = \frac{1}{4}$.

- $E[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$.
- $V[X] = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{2}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} - 1 = \frac{6}{4} - 1 = \frac{1}{2}$.

1.5 Lois discrètes usuelles : 04-03-2018

1.5.1 Loi uniforme :

On dit que une VA X suit une loi uniforme discrète lorsque quel prend ses valeurs dans l'intervalle $\{1, \ldots, n\}$ avec des probabilités élémentaires identiques ($= \frac{1}{n}$). Puisque la somme de ces dernières doit valoir 1 on en déduit qu'elles doivent être égales à $\frac{1}{n}$

- $\forall k = 1, \ldots, n$; $P([X = k]) = \frac{1}{n}$
- $E[X] = \frac{n+1}{2}$
- $V[X] = \frac{n^2 - 1}{12}$

Exemple : X = résultat d'un jet de dé à 6 faces.

$n = 6$, $x_i = \{1, \ldots, 6\} \longrightarrow \forall k \in \{1, \ldots, 6\}$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$.

- $E[X] = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$
- $V[X] = \frac{36 - 1}{12} = \frac{35}{12}$

1-5-2- Loi Bernoulli = $B(p)$:

Cet loi est celle de toute VA. X modélisant une experience dont l'issue ne possède que 2 alternatives de types = "succès ou échec", "Pile ou face", "marche ou arrêt", "vrai ou faux"

- un succès est représenté par l'événement $\{X = 1\}$:

$X(\Omega) = \{0, 1\} \rightarrow P[X=1] = P \; ; \; P[X=0] = 1 - P$

- $E[X] = P$
- $Var[X] = P(1-P)$.

Ex = un sac contient 40 boules (30 blanches, 10 rouges).
On tire 1 seule boule. Soit (X) VA "la boule rouge".

→ X suit une loi de Bernoulli.

- $E[X] = P = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.
- $Var[X] = P(1-P) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$.
- $\sigma = \sqrt{Var[X]} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

1-5-3- Loi Binomiale = $B(n, P)$:

est la loi de probabilité d'une VA représentant une série d'épreuves de "Bernoulli". La variable X prend pour valeur le nombre de succès dans une suite d'un n épreuves. C'est une loi à deux paramètres =

- le nbr d'épreuves (identiquement indépendant)
- P = Probabilité de succès.
- $P[X=k] = C_n^k \cdot P^k \cdot (1-P)^{n-k}$
- $E[X] = nP$
- $Var[X] = nP(1-P)$

Ex: on lance 10 fois un dé.

1. Quelle est la probabilité d'avoir 4 fois le chiffre 1 :
2. " " " " au plus 3 fois " 1.

Sol = X . VA = "avoir le chiffre 1".

$\bar{X}$ = "n'avoir pas le " 1".

→ X suit une loi Binomiale

$X = B(10, 1/6)$.

1. $P[X=4] = C_{10}^4 \cdot (1/6)^4 \cdot (1 - 1/6)^{10-4}$
$= 0,54$.

2. $P[X] = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] + P[X=3]$.

$P[X] =$

1-5-4- Loi Géométrique

C'est la loi du 1ère succès :

Ex: on lance une pièce jusqu'à ce qu'on obtienne une fois "Pile". On note P la probabilité de tomber sur "Pile". La proba d'avoir "Pile" au $k^{ème}$ tirage suit une loi Géométrique donné par =

- $P[X=k] = P(1-P)^{k-1}$, $k \geq 1$ $\qquad \frac{r^k - 1}{r - 1}$
- $E[X] = \frac{1}{P}$
- $V[X] = (1-P)/P^2$

Ex: Quelle est la proba d'avoir "Pile" dans le tirage "4".

- $P[X=4] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.
- $E[X] = \frac{1}{1/2} = 2$.
- $Var[X] = \frac{1}{2} / \frac{1}{4} = 2$.

2.5.3 Loi de Poisson :

- La loi de poisson modélise des situations où on s'intéresse au nbr d'occurences d'un évènement dans un laps de temps déterminé ou dans une région données par exemple :
  - Nbr d'appelle téléphonique qui arrive à 1 Standard en X minute..
  - nbr de clients qui attendent à la caisse d'un magasin.
  - nbr de défauts de pinture par m^2 sur la carrosserie d'un véhicule.

$$P_X(k) = P[X=k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

- $E[X] = \lambda$
- $Var[X] = \lambda$

TD : 03

EX02 : X : nbr boules blanches obtenues.

- $P[X=0] = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1) \cdot P(N_2) \cdot P(N_3)$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

- $P[X=1] = P(B_1)P(N_2)P(N_3) + P(N_1)P(B_2)P(N_3) + P(N_1)P(N_2)P(B_3)$

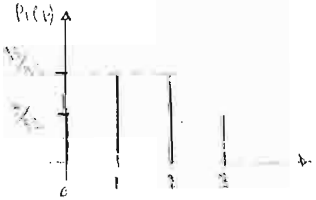
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{32}$$

- $P[X=2] = P(B_1)P(B_2)P(N_3) + P(B_1)P(N_2)P(B_3) + P(N_1)P(B_2)P(B_3)$

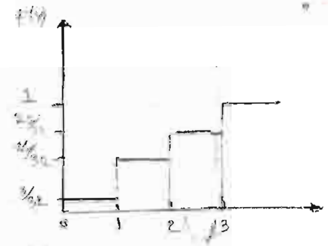
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{32}$$

- $P[X=3] = P(B_1)P(B_2)P(B_3)$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$



x_i	0	1	2	3
$P_X(x_i)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{6}{32}$
$F(x)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{29}{32}$	1



EX03 :
- $E[X] = -5$
- $Var[X] = 4$
- $E[Y] = 3$
- $Var[Y] = 1$

→ $E([-3X+2]) = -3E[X]+2 = 15+2 = 17$.

→ $V[-3X+2] = (-3)^2 V[X] = 9 \times 4 = 36$.

→ $E([X+5]^2) = V(X+5) + (E[X+5])^2 = 4+0 = 4$.

→ $E[X^2] = V[X] + (E[X])^2 = 4+25 = 29$.

→ $E([X-1]^2) = E[X^2] - 2E[X] + 1 = 29+10+1 = 40$.

→ $E[X+Y] = E[X] + E[Y] = -5+3 = -2$.

→ $V[X+Y] = V[X] + V[Y] = 4+1 = 5$

EX04 :

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$;

$P(X=0) = \frac{C_7^5}{C_{10}^5} = 0{,}08$; $P(X=1) = \frac{C_7^4 \times C_3^1}{C_{10}^5} = 0{,}42$

$P(X=2) = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = 0{,}42$; $P(X=3) = \frac{C_7^2 \cdot C_3^3}{C_{10}^5} = 0{,}08$

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	0,08	0,42	0,42	0,08
$F(x)$	0,08	0,5	0,92	1

EX 4 – X : "Nbr de pièces défectueuses".

X suit une loi Binomial $B(10, 0{,}03)$

$X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, 10\}$.

$\longrightarrow P[X = k] = C_n^k (P)^k (1-P)^{n-k}$.

- $P[X = 0] = C_{10}^0 (0{,}03)^0 (0{,}97)^{10} = 0{,}74$.
- $P[X \geq 1] = P[X = 1] + P[X = 2] + \ldots + P[X = 10]$
  $= 1 - P[X = 0]$
  $= 1 - 0{,}74 = 0{,}26$
- $E[X] = nP = 10 \cdot 0{,}03 = 0{,}3$.
- $Var[X] = nP(1-P) = 10 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97 = 0{,}3 \cdot 0{,}97 = 0{,}291$.
- $\sigma = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{0{,}291} = 0{,}54$.

EX 05 –

$X = B(\overset{n}{10}, \overset{P}{\tfrac{1}{4}})$. $\Rightarrow P(X = k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

1/ $P(X = 4) = C_{10}^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^6$

III) V.A Continue =

18.03.2018

On dit qu'une V.A X est continue s'il existe une fonction f non négative définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant pour tout ensemble B de nombres réels la propriété :

$$P(X \in B) = \int_B f(x)\, dx.$$

La fonction f est appelée <u>densité</u> de probabilité satisfaisant les conditions suivantes :
1/ $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2/ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d(t) = 1$

$\longrightarrow$ Si $B = [a, b]$ alors, $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$.

$\longrightarrow$ Si on pose $a = b$ alors, $P(X = a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$

. Ceci signifie que la probabilité qu'une variable aléatoire continue prenne une valeur <u>isolée</u> <u>fixe</u> est <u>toujours nulle</u>.

III.1 – La fonction de répartition =

La densité de probabilité d'une VAC est souvent définie à partir de sa fonction de répartition donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

$$f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$$

$\longrightarrow F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx$.

$\longrightarrow P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\, dx$.

II. 2. L'espérance mathématique :

$$\longrightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x)\, dx$$

II. 3. La variance :

$$\longrightarrow V[X] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \cdot (X - E[X])^2$$

$$= E[X^2] - E[X]^2$$

$$\longrightarrow E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x) \cdot dx.$$

NB :
- $(x^n)' = n\, x^{n-1}$
- $\int (x^n) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
- $\int f(x) \mp g(x) \longrightarrow F(x) \mp G(x)$.
- $\int e^x \longrightarrow e^x$.
- $\int e^{ax} \longrightarrow \frac{1}{a} e^{ax}$.

exemple : Supposant que X soit une VAC, dont la ddp est :

$$f(X) = \begin{cases} C(4X - 2X^2) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1/. Quelle est la valeur de C ? Que vaut $P(X > 1)$?
2/ calculer $E[X]$, $\sigma[X]$, $F_X(1)$.

Sol :

1/ : $\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 C(4x - 2x^2)\, dx = 1$

$$= C\left[\int_0^2 4x - 2x^2\, dx\right] = 1$$

$$= C\left(\left[2x^2\right]_0^2 - \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^2\right) = 1$$

$$= C\left[8 - \frac{16}{3}\right] = 1$$

$$= C \cdot \frac{8}{3} = 1 \longrightarrow C = \frac{3}{8}$$

$\longrightarrow P(X > 1) \Longrightarrow \int_1^2 f_x(x)\, dx = \int_1^2 C(4X - 2X^2)\, dx.$

$$= \int_1^2 \frac{3}{8}(4X - 2X^2)\, dx.$$

$$= \frac{3}{8}\left(\left[2x^2\right]_1^2 - \left[\frac{2}{3}x^3\right]_1^2\right)$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \left(6 - \frac{14}{3}\right)$$

Donc : $P(X > 1) = \frac{1}{2}$.

$\longrightarrow P(X = 1) = 0$.

2/ $E[X] = \int_0^2 x \cdot f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{3}{8}(4X^2 - 2X^3)\, dx.$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 - \frac{3}{4}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3} - 0\right) - \frac{3}{4}(4 - 0) = 4 - 3$$

$\longrightarrow E[X] = 1$.

• $\sigma[X] = \sqrt{V[X]}$.

$$\rightarrow V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \int_0^2 x^2 f_X(x)\,dx - 1^2 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

• $\sigma[X] = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

• $F_X(1) = ? = \int_0^1 f(x)\,dx = P(x \leq 1)$

$$\Longrightarrow P(x \leq 1) = 1 - P(x > 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow F_X(1) = \frac{1}{2}$.

* Propriétés :

- $E[aX+b] = a\,E[X] + b$.
- $V[aX+b] = a^2\,V[X]$.
- $\sigma[aX+b] = |a|\,\sigma[X]$.
- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- $E[X-Y] = E[X] - E[Y]$.

– Si de plus X et Y sont indépendantes :

- $V[X+Y] = V[X] + V[Y]$.
- $V[X-Y] = V[X] + V[Y]$.

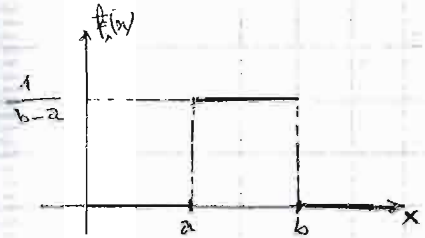
Si • $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$.

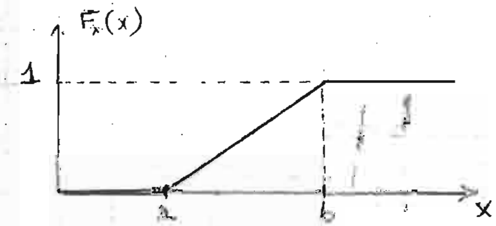
III V – Lois Continues Usuelles :

1 – Loi uniforme : *

Cette loi est l'analogue continue de l'équiprobabilité dans le cas discret, elle permet de modéliser le tirage d'un nombre aléatoire dans l'intervalle $[a,b]$. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; x \in [a,b]. \\ 0 & ; \text{sinon.} \end{cases}$

• $F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a. \\ \frac{x-a}{b-a} & ; x \in [a,b]. \\ 1 & ; x > b. \end{cases}$





$$\boxed{E[X] = \frac{a+b}{2}}$$

Dém : $E[X] = \int_a^b x\,f(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overbrace{(b^2 - a^2)}^{(b+a)(b-a)}$$

$$= \frac{1}{2}(b+a)$$

$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$
$= \frac{(b-a)^2}{12}$

→ $X \rightsquigarrow$ un loi uniforme, dans $[a,b]$ =

$[c,d] \subset [a,b] \implies P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$

Exemple =

Omar vient tous les matins entre 7^h et $7^h\,45'$ chez Karim pour prendre un café.

01/ sachant que Omar revient jamais en dehors de la plage indiquée avec la même chance. quelle est la probabilité ?

Sol → $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{45} & ; [0, 45], \\ 0 & ; \text{sinon}. \end{cases}$

02/ calculez la probabilité d'arrivée à Karine =

a - Après $7^h, 30'$.

b - avant $7^h, 10'$.

c - entre $7^h\,20$ et $7^h\,30'$. d - exactement à $7^h\,30'$.

03/ Calculez l'heure moyenne d'arrivée de Omar ?

2/ - Sol →

a - $P(\text{Après } 7^h 30) = P(30 \leq x \leq 45)$
$= \frac{45-30}{45-0} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

b - $P(\text{Avant } 7^h 10') = P(0 \leq x \leq 10)$
$= \frac{10-0}{45-0} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

c - $P(\text{entre } 7^h 20 \text{ et } 7^h 30') = P(20 \leq x \leq 30)$
$= \frac{30-20}{45-0} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

d - $P(d) = 0$.

3/ → L'heure moyenne $= E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{45+0}{2} = 22{,}5'$.

Omar $= 7^h\,22'\,30''$.

15-04-2018

2 - Loi exponentielle = *

On recontre souvent cette distribution lorsqu'il s'agit de representer le temps d'attente avant l'arrivée d'un évenement spécifié.

* exemple = Le temps qui nous sépare du Prochain tremblement de terre.
- " " " de la prochaine guerre mondiale.
- " " " Prochain appel téléphonique.

→ $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{sinon}. \; x < 0 \end{cases}$

→ $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$

→ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\, dx$.
$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx$.
$= \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx$.
$= \lambda \left[\frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^x$
$= -e^{-\lambda x} + 1$
$= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$

→ $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

→ $V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

3- Loi normale :

Est une loi centrale dans la théorie de probabilité elle est notamment très utilisée dans les statistique. une grandeure influencée par un grand nombre de paramaitre indépendant est souvent modélisé par une loi normale (par exemple, les erreurs de mésure lors une expérience).

$$\longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow E[X] = m$$

$$\longrightarrow V[X] = \sigma^2$$

4- loi weibull :

Est utilisée en démographie pour modélisée le vieillissement. et à l'épidemiologie pour modélisé la distribution de probabilité de la durée d'incubation d'une maladie infectieuse.

$$\longrightarrow f(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right) \quad ; \quad x > 0$$

$$\longrightarrow F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right) \quad ; \quad x > 0$$

5- Loi Gamma :

Cette loi représente fréquemment de la distribution des temps d'attente avant la n-iéme occurence d'un certain type d'évenement.

$$\longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \, e^{-\frac{x}{\beta}} & ; \; x > 0 \\ 0 & ; \; \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\longrightarrow E[X] = \alpha\beta .$$

$$\longrightarrow V[X] = \alpha\beta^2 .$$

TD 04 :

Exo1 :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/8 \; ; & -3 \leq x < -1 \\ 1/4 \; ; & -1 \leq x < 1 \\ 1/8 \; ; & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \; ; & x > 3 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Pour être distribution : $f(x) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

- $E[X] = \int_{-3}^{3} x f(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} x f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx + \int_{1}^{3} x f(x)\,dx$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \boxed{0}$$

- $\sigma[X] = ?$
- $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$\longrightarrow E[X^2] = \int_{-3}^{3} x^2 f(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} x^2 f(x) + \int_{-1}^{1} x^2 f(x) + \int_{1}^{3} x^2 f(x)\,dx$

$$= \frac{13}{12} + \frac{2}{12} + \frac{13}{12} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\sigma[X] = \sqrt{\frac{7}{3}}}$$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-3}^{x} f_X(x)\,dx.$

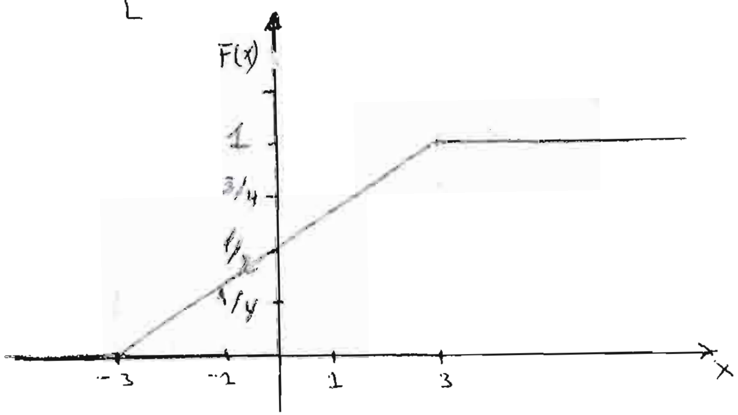
$-3 \leq x < -1 \longrightarrow F_X(x) = \int_{-3}^{x} \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{8}\left[x\right]_{-3}^{x} = \frac{1}{8}(x+3)$

$-1 \leq x < 1 \longrightarrow F_X(x) = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{8}\,dx + \int_{-1}^{x} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x+1).$

$1 \leq x \leq 3 \longrightarrow F_X(x) = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{8}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\,dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{8}\,dx$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{8}(x-1).$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < -3 \\ \frac{1}{8}(x+3) & ; -3 \leq x < -1. \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x+1) & ; -1 \leq x < 1. \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{8}(x-1) & ; 1 \leq x \leq 3. \\ 1 & ; x > 3 \end{cases}$$



Ex02 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} \quad ; x \geq 0.$

$\longrightarrow \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-x/100}\,dx = 1 \longrightarrow \boxed{\lambda = 1/100}.$

$P(50 \leq x \leq 150) = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100}\,dx = \frac{1}{100}\left[-100\, e^{-x/100}\right]_{50}^{150}$

$= -e^{-\frac{150}{100}} + e^{-\frac{50}{100}}$

$= 0,383$

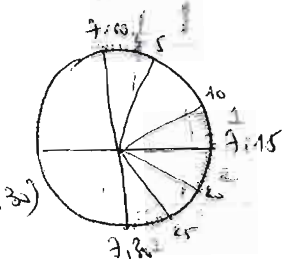
$P(x < 100) = \int_{0}^{100} \frac{1}{100} e^{-x/100}\,dx = \frac{1}{100}\left[-100\, e^{\frac{-x}{100}}\right]_{0}^{100}$

$= -e^{-1} + 1$

$= 1 - e^{-1} = 0,63$

Ex03 V.a. uniforme dans $[0, 30]$.

$f(x) = \begin{cases} 1/30 & ; x \in [0, 30]. \\ 0 & ; \text{sinon}. \end{cases}$



1 → $P(\text{moin de } 5 \text{ min}) = P(10 \leq x \leq 15) + P(25 \leq x \leq 30)$

$= \left(\frac{15-10}{30-0}\right) + \left(\frac{30-25}{30-0}\right)$

$= \frac{10}{30} = 1/3 = 0,33.$

2 → $P(\text{plus de } 10 \text{ min}) = P(0 \leq x < 5) + P(15 \leq x < 20)$

$= \left(\frac{5-0}{30-0}\right) + \left(\frac{20-15}{30-0}\right) = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{10}{30}$

$= 1/3 = 0,33.$

$\rightarrow F(x) = 1 - e^{-x/10}$

Ex4 = $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-x/10} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{sinon}. \end{cases}$ (Loi exponentielle)

- $P(\text{plus de } 10 \text{ min}) = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx = 1 - F(10).$

$$= \frac{1}{10}\left[-10 e^{-x/10}\right]_{10}^{+\infty} = \left[-e^{-\infty} + e^{-1}\right]$$

$$= e^{-1} = \boxed{1/e} = 0,367$$

- $P(\text{entre } 10 \text{ et } 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx = F(20) - F(10)$

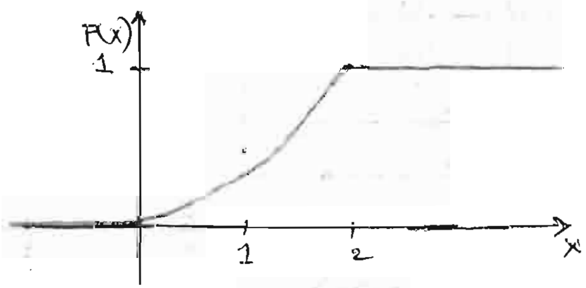
$$= \frac{1}{10}\left[-10 e^{-x/10}\right]_{10}^{20} = -e^{-2} + e^{-1}$$

$$= \frac{1}{e} - e^{-2} = \boxed{0,23}$$

Ex06 =

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{1}{4} x^2 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & ; x > 2 \end{cases}$$



Statistique descriptive = 22.04.2018

I) Vocabulaire =

1 _ Population = On appelle population un ensemble d'éléments homogène auquelle s'interesse l'étude statistique, Par exemple = les étudiant d'une classe.

2 _ échantillon = on parle d'échantillon d'une population statistique quand les unités statistiques sont choisies par une méthode qui permet d'assurer la representativité par rapport à la population totale.

3 _ individus = On appelle individu (ou unité statistique) tout élément de la population étudiée.

4 _ Variable statistique = (VS) = On appelle VS une application qui associe à chaque individu de la population, une observation particulière.

ex = les notes des étudiants, leurs sexe, couleurs, leurs yeux, ...!

5 _ Données brutes ou groupées = les observations collectées sur une étude statistique est souvent presentées sous forme d'une serie brute (donnée brute) avant d'effectuer aucun traitement. Si ces observations sont regroupées selon un critère de similarité sont appelées données groupées.
تشابه

II) Type d'une VS =

Une VS est dite =

1 Qualitative = si elle est liée à un ensemble d'observation non mesurable.

ex - Nationalité, Sexe, Couleur, Mension au bac.

* On distingue 02 types de V.S Qualitative = Ordinale et Nominale.
→ une V.S qualitative est dite Ordinale, lorsque ses modalités peuvent être classé dans un certin ordre (Mension au bac).
→ une V.S.Q. est dite Nominale, lorsque ses modalité ne peuvent être classé de façon naturelle (Couleur des yeux.).

2 _ Quantitative _ lorsqu'elle est mésurée par un nombre.
Ex = notes des étudiants, nombre d'enfants ___ ..
* On distingue 02 types de V.S. Quatitative = discrète et Continue.
→ les variables discrètes ne permet que des valeurs isolées.
→ les " continues peuvent prendre toute valeurs dans un intervalle.

III Tableau des fréquence et représentation graphique = 1_ V Qualitative =

Individu	Couleur des yeux	Mention au Bac	Individu	Couleur des yeux	Mension au Bac
Ahmed	V	P	Bachir	B	P
Malak	B	AB	Saleh	V	B
donia	N	P	Abbes	M	P
Zino	M	P	Mohamed	B	TB
Zina	B	AB	Yacine	V	AB
Sonfiène	V	P	Monsif	N	P
Hounia	N	B	Amine	M	P
Fares	M	AB			

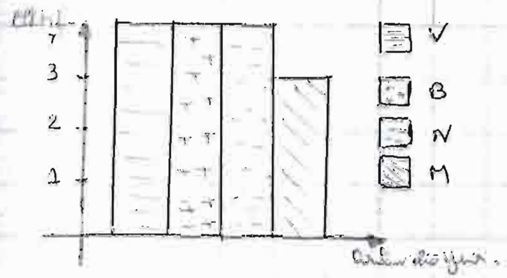
→ Nominale =

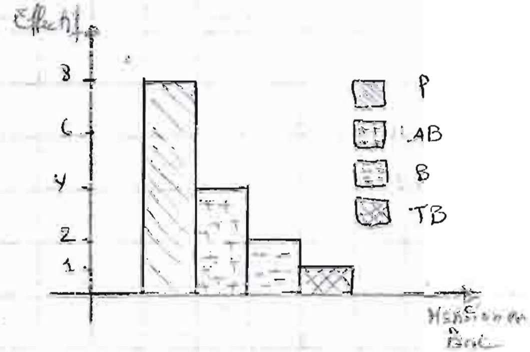
Coulur	V	B	N	M	ToT
Effectif	4	4	4	3	15

→ Ordinale =

Mension au Bac	P	AB	B	TB	ToT
Effectif	8	4	2	1	15

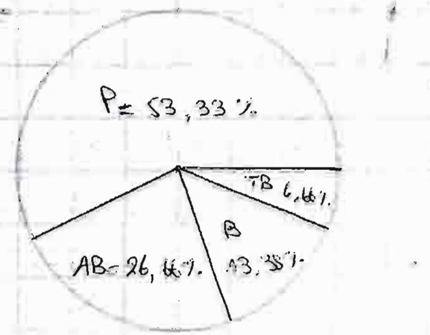
* Diagramme à bandes =





* Diagramme à Secteurs =

15 ⟶ 360° ⟶ 100%
P : 8 ⟶ 192° = 53,33 %.
AB : 4 ⟶ 96° = 26,66 %.
B : 2 ⟶ 48° = 13,33 %.
TB : 1 ⟶ 24° = 6,66 %.



2_ Tableau de fréquences -

Mension au Bac	effectif n	f	%
P	8	8/15	53,33
AB	4	4/15	26,66
B	2	2/15	13,33
TB	1	1/15	6,66

N_i = effectif cumulé.

F_i = fréquence cumulé.

2_ V. Quantitative -

a_ discrète -

• Exemple = Une enquête réalisée dans un village porte sur le nombre d'enfants à charge par famille. X = nbr d'enfants.

$n_i x_i$	x_i	n_i	$N_i\uparrow$	f_i	$F_i\uparrow$
0	0	18	18	18/200	18/200
32	1	32	50	32/200	50/200
132	2	66	116	66/200	116/200
123	3	41	157	41/200	157/200
128	4	32	189	32/200	189/200
45	5	9	198	9/200	198/200
12	6	2	200	2/200	1
472					

• n_i → effectif.

• $N_i\uparrow$ → " cumulée.

• f_i → Fréquence.

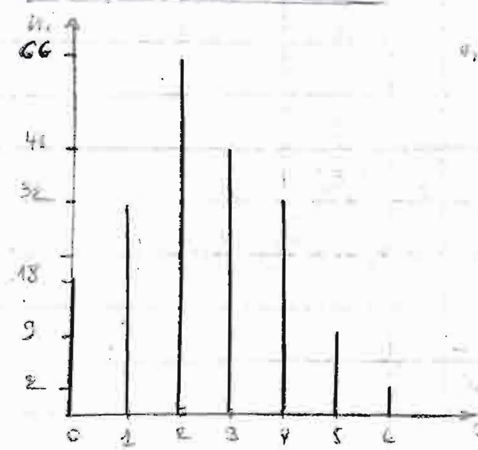
• F_i → " cumulée

↳ la répartition

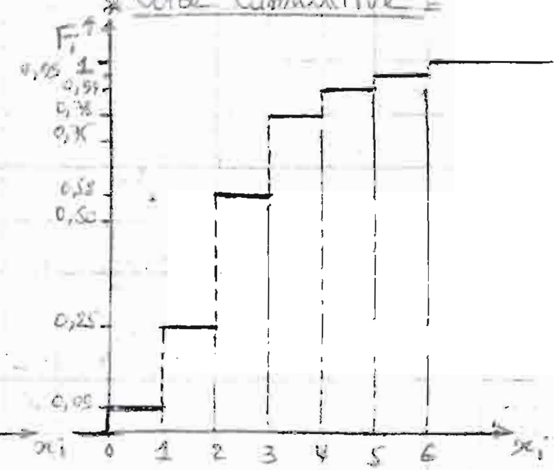
→ 50 est le nbr de familles ayant nbr d'enfant ≤ 1.

→ 78,5% = $\frac{157}{200}$ ×100 de famille dont le nbr d'enfants ≤ 3.

• Diagramme de bâtons -



• Courbe Cumulative -



b_ Continue -

Exemple -

Individu	Note de statistique
Horia	12
Ahmed	08
Bachir	13
Zino	11
Fares	10
Sihem	09
Hamza	16

Individu	note de statistique
Amar	14
Mohamed	11
Yacine	15
Soufef	04
Malek	18
monsif	12
Amine	06
Taki	02

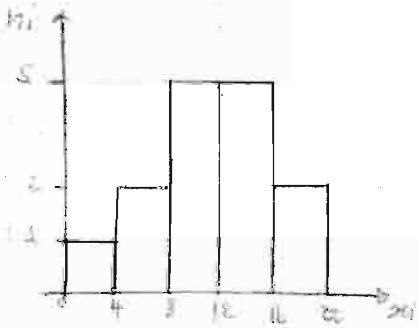
x_i	n_i	$n_i\uparrow$	f_i	$F_i\uparrow$	$F_i\downarrow$
[0 – 4[	01	01	0,066	0,066	1
[4 – 8[	02	03	0,133	0,199	0,934
[8 – 12[	05	08	0,333	0,532	0,801
[12 – 16[	05	13	0,333	0,865	0,468
[16 – 20[	02	15	0,133	1	0,135
	$\Sigma = 15$				

→ Nbr de classe = • Yule = $K = 2{,}5\sqrt[4]{N}$.

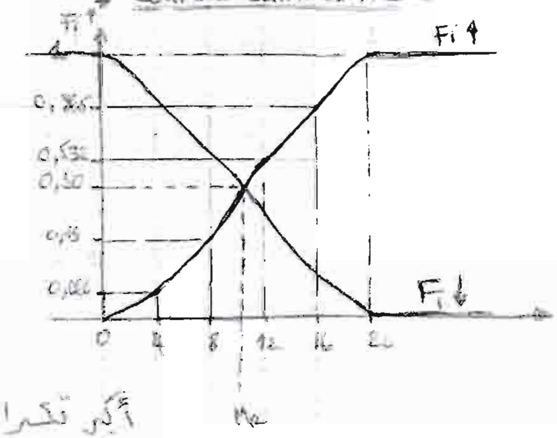
• Sturge = $K = 1 + 3{,}3 \log_{10}(N)$.

→ La Taille de classe = $T = \dfrac{X_{max} - X_{min}}{K}$

* Histogramme =



* Courbe Cumulative =



→ Le Mode = المنوال → أكثر تكرار

→ La Médiane = الوسيط →

IV) Mesures et tendance Centrale = (Position) =

1 – Discrète =

Exemple = Au Poste de Payage, on Compte le Nbr des voitures se présentent sur une période de 5 min. Sur 100 observation de 5 min, en opten les résultats suivants =

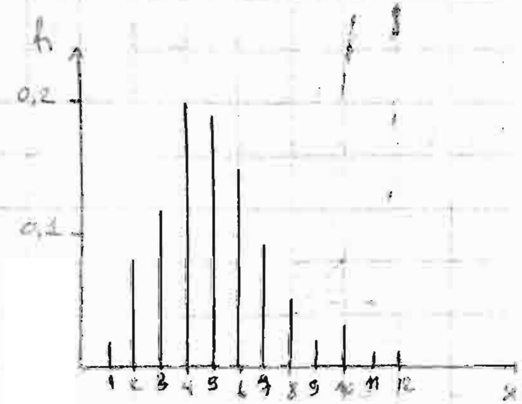
Nbr de Voiture	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nbr d'observation	2	8	14	20	19	15	9	6	2	3	1	1

• Questions = 1 – Construire la Table des fréquences et le diagramme en bâton en fréquence de la série des Nbr des voitures !

2 – Calculer la Moyenne et la Médiane de cette Série !

3 – " le Mode ?

x_i	n_i	$n_i\uparrow$	f_i	$F_i\uparrow$
1	2	2	0,02	0,02
2	8	10	0,08	0,1
3	14	24	0,14	0,24
4	20	44	0,20	0,44
5	19	63	0,19	0,63
6	15	78	0,15	0,78
7	9	87	0,09	0,87
8	6	93	0,06	0,93
9	2	95	0,02	0,95
10	3	98	0,03	0,98
11	1	99	0,01	0,99
12	1	100	0,01	1



→ le Mode = الأكثر تكرارا = المنوال ⟹ $M_o = 4$.

→ la Moyenne = الوسط ⟹ $\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{507}{100} = \boxed{5,07}$

→ la Médiane = الوسيط ⟹ $\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$ → $Mé = 5$

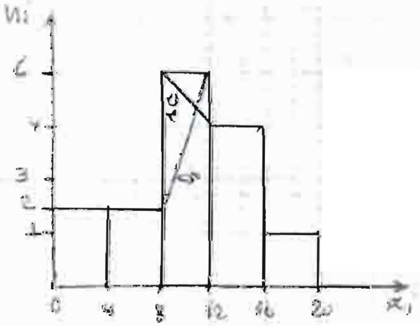
(إذا وجدتين 44 و 63 ← نختار الأكبر). ← الرتبة ← الوضعية

2. Continue =

Exemple =

notes x_i	n_i	N_i↑	C_i (Centre de classe)	n_iC_i
[0 _ 4[	2	2	2	4
[4 _ 8[	2	4	6	12
[8 _ 12[	6	10	10	60
[12 _ 16[	4	14	14	56
[16 _ 20[	1	15	18	18
	15			150

x. Histogramme =



· le Mode =

→ $Mó \in [8 \_ 12[$.

· $D_1 : y = a_1x + b_1 \to a_1 = 1 \quad b_1 = -6$

· $D_2 : y = a_2x + b_2 \to a_2 = -0,5 \quad b_2 = 10$

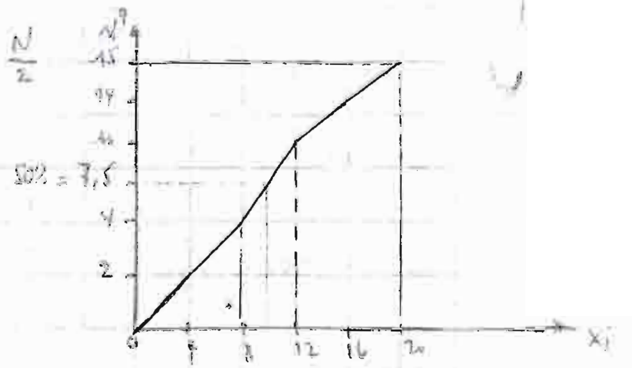
→ $Mo : \begin{cases} y = x - 6 & ① \\ y = -0,5x + 10 & ② \end{cases}$

① = ② → $x = \boxed{Mo = 10,66}$

b_2, a_2 بنفس الطريقة نجد ← $\left.\begin{array}{l}(8,2) \in D_1 \Rightarrow 2 = a_1 8 + b_1 \\ (12,6) \in D_1 \Rightarrow 6 = a_1 16 + b_1\end{array}\right\} \to a_1 ; b_1$

→ La moyenne = $\bar{x} = \frac{\sum C_i n_i}{\sum n_i} = \frac{150}{15} = 10$

→ La Médiane = $\frac{N}{2}$



• $Me \in [8, 12[$

→ $y = ax + b$

$(8,4) \to 4 = a.8 + b$

$(12,10) \to 10 = a.12 + b$.

⟹ $a = 3/2$, $b = -8$

→ $y = 3/2 x - 8$ • Alors : $7,5 = 3/2 x - 8$ → $\boxed{X = Me = 10,33}$

or : $Me = \underset{8}{L} + \left[\left(\underset{7,5}{N/2} - \underset{4}{N_{me-1}}\right) / \underset{6}{n_{me}}\right] \times \underset{\text{طول الفئة} = 4}{A}$

$Me = 8 + \frac{(7,5 - 4)}{6} \times 4 = 10,33$.

→ Ex = les équations des Droites de chaque intervalle.

V) Mesures de dispersion =

1. discret = Exemple = Nbr d'enfants par famille =

→ L'écart type = $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$

→ $\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{\sum x_i^2}{n} - 2\bar{x} \sum x_i + \sum \bar{x}^2$

$= \frac{\sum x_i^2}{n} - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2$

$= \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

→ La Variance = $\sigma^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i} - \bar{x}_i^2$

→ $\bar{x} = \frac{1}{\sum n_i} \sum x_i n_i = \frac{472}{200} = 2,36$.

→ Variance = $\frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i} - \bar{x}^2 = \frac{1474}{200} - (2,36)^2 = 1,8$

→ Écart type = $\sqrt{Var} = \sqrt{1,8} = 1,34$

→ le Coéfficient de variation = $CV = \frac{\delta}{\bar{x}} \cdot 100$

→ $CV = \frac{1,34}{2,36} \times 100 = 56,77\ \%$

2_ Continue = Exemple Note statique =

→ La Variance = $Var = \sigma^2 = \frac{\sum n_i c_i^2}{\sum n_i} - \bar{x}^2$

→ L'ecart type = $\sigma = \sqrt{Var} = \sigma$

→ le coeficient de variation = $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$.

→ $\bar{x} = \frac{\sum n_i c_i}{\sum n_i} = \frac{150}{15} = 10$

→ $\sigma^2 = \frac{\sum n_i c_i^2}{\sum n_i} - \bar{x}^2 = \frac{1788}{15} - (10)^2 = 19,2$

→ $\sigma = 4,38$

→ $CV = \frac{4,38}{10} \times 100 = 43,8$

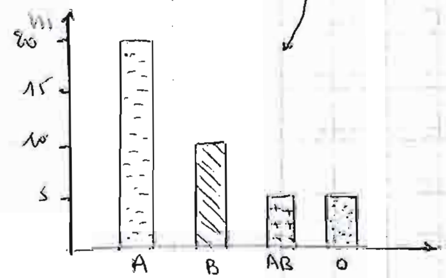
TD N° 05 = Statistique descriptive =

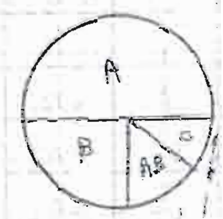
EX01 =

1_ ~~[illegible]~~ Qualitative → nominale.

2_ $\sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 40 \longrightarrow n_3 = 5$

3_ Diagramme à bandes (boites) et à secteurs.





A = 50%

B = 25 %

AB = 12,5 %

O = 12,5 %

EX03 = Comparaison =

→ Groupe A = $\bar{x} = \frac{55}{6} = 9,16$

• $\sigma = 1,12$

• $CV = 12,2\%$

→ Groupe B = $\bar{x} = 9,12$

• $\sigma = 2,77$

• $CV = 30,37\%$

→ Le même moyenne mais différente dispersion / Groupe A → homogène.

Ex-02 : 13 - 05 - 2018

1 - le variable statistique : Quantitatifs discrète.

2 - le Tableau statistique :

x_i	n_i	$N_i\uparrow$	f_i	$F_i\uparrow$	$x_i n_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
5	3	3	3/52	3/52	15	25	75
6	1	4	1/52	4/52	6	36	36
7	3	7	3/52	7/52	21	49	147
8	4	11	4/52	11/52	32	64	256
9	7	18	7/52	18/52	63	81	567
10	5	23	5/52	23/52	50	100	500
11	8	31	8/52	31/52	88	121	968
12	8	39	8/52	39/52	96	144	1152
13	3	42	3/52	42/52	39	169	507
14	6	48	6/52	48/52	84	196	1176
15	3	51	3/52	51/52	45	225	678
16	1	52	1/52	1	16	256	256
/	52	52	1	1	555		6315

Densité de Prop

5 - le Mode : $\boxed{M_o = 11}$, $\boxed{M_o = 12}$.

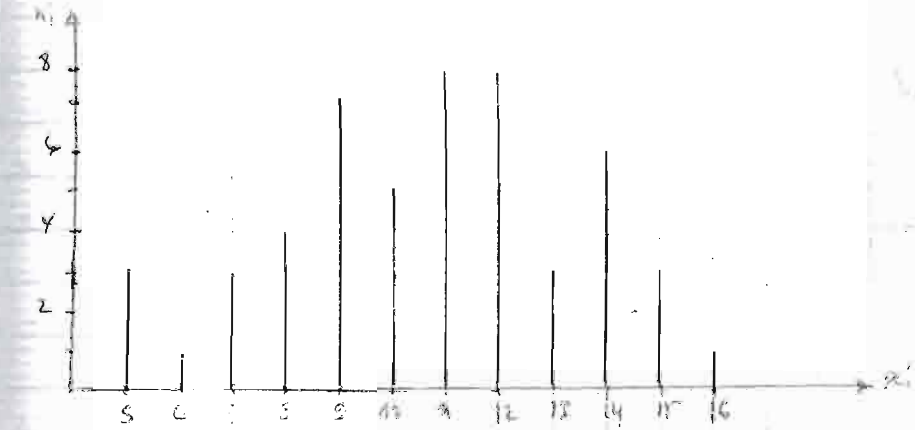
$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{555}{52} = \boxed{10,67}$

6 - La Médiane : $Me = N/2 = 26 \longrightarrow \boxed{Me = 11}$

7 - Var = $\sigma^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i} - \bar{x}^2 = \frac{6315}{52} - (10,76)^2 = \boxed{7,59}$

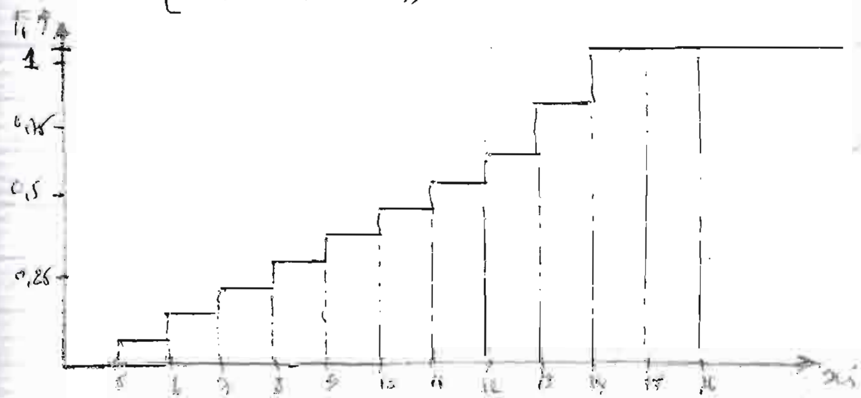
$\boxed{\sigma = 2,75}$ (l'écart type).

3 - le diagramme en bâton :

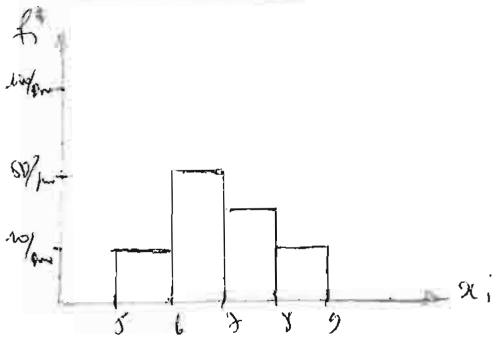


4 - La Fonction de répartition F_x :

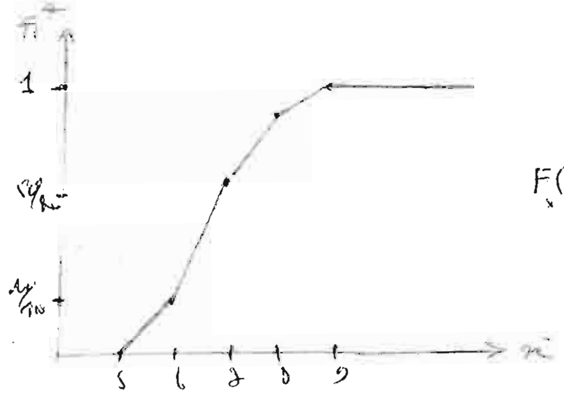
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 5 \\ 3/52 & ; 5 \leq x < 6 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & ; x \geq 16 \end{cases}$$



→ Cas continue = Exemple =



$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 5 \\ 10/100 & ; 5 \leq x \leq 6 \\ 50/100 & ; 6 < x \leq 7 \\ 30/100 & ; 7 < x \leq 8 \\ 10/100 & ; 8 < x \leq 9 \end{cases}$$



$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 5 \\ 0{,}2x - 0{,}5 & ; 5 < x \leq 6 \\ 0{,}5x - 2{,}9 & ; 6 < x \leq 7 \\ \vdots & ; 7 < x \leq 8 \\ \vdots & ; 8 < x \leq 9 \\ 1 & ; 9 < x \end{cases}$$

- $y = a_1 x + b_1$

$(6, 0{,}1)$ et $(7, 0{,}6)$ ⟶ $a = 0{,}5$ et $b = -2{,}9$.

⋮

→ Cours 6 = statistique descriptive bidimensionnelle =

I. Série statistique =

On s'intéresse à 2 variables x et y :

la série statistique est alors une suite de n couples des valeurs prises par les 2 variables. $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ ——— (x_n, y_n).

II. Analyse de variable =

1. Paramètres marginaux =

Ces variables x et y peuvent être analysées séparément =

- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$
- $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$
- $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$
- $\sigma_y = \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum y_i^2 - \bar{y}^2$

2. Covariance =

Nous notons $Cov(x, y)$ la covariance entre x et y. La covariance est un paramètre qui donne la variabilité de x par rapport à y.

- $Cov(x, y) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$
- $Cov(x, x) = \sigma_x^2$

Rq =

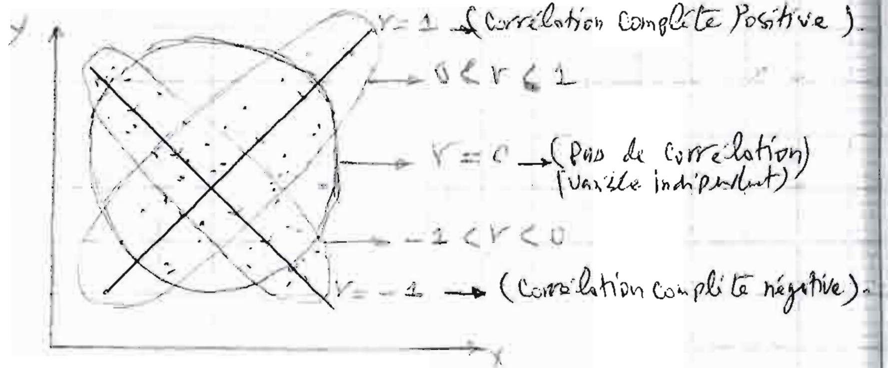
La covariance peut prendre des valeurs = Positives, négatives ou nulles.

3. Corrélation =

le coefficient de corrélation est la covariance divisée par les 2 écarts-types marginaux.

$$r_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad ; \quad -1 \le r_{xy} \le 1$$

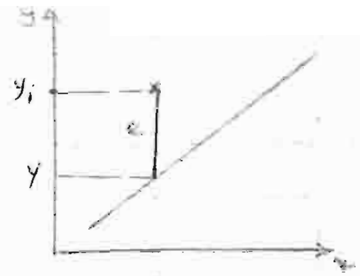
→ le coefficient de corrélation mesure la dépendance linéaire entre 2 variables.



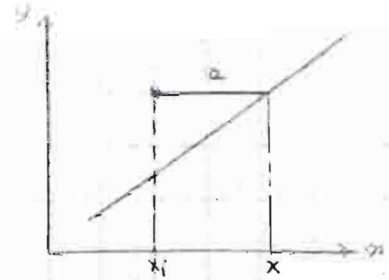
III. Ajustement Affine (linéaire) du nuage des point =

1. Droite de regression par la méthode des moindres carrés.

$y = ax + b$; $a = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x^2}$; $b = \bar{y} - a\bar{x}$



→ y/x



→ x/y

→ $e = \sum (y_i - (ax_i + b))^2$

- $\frac{\delta e}{\delta a} = 0 \Rightarrow \sum -2x_i (y_i - ax_i - b) = 0$ —— ①
- $\frac{\delta e}{\delta b} = 0 \Rightarrow \sum -2 (y_i - ax_i - b) = 0$ —— ②
- ② / -2n $\Rightarrow \frac{\sum y_i}{n} - a\frac{\sum x_i}{n} - \frac{\sum b}{n} = 0$

$\Rightarrow \bar{y} - a\bar{x} - b = 0$ → $\boxed{b = \bar{y} - a\bar{x}}$

- ① / -2n $\Rightarrow \frac{\sum x_i y_i}{n} - a\frac{\sum x_i^2}{n} - b\frac{\sum x_i}{n} = 0$

$\Rightarrow \frac{\sum x_i y_i}{n} - a\frac{\sum x_i^2}{n} - b\bar{x}$

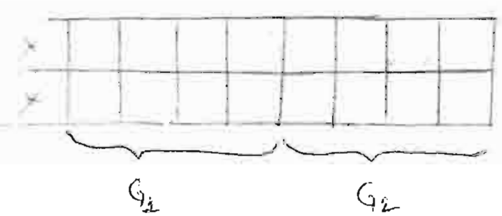
$\Rightarrow \frac{\sum x_i y_i}{n} - a\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{y}\bar{x} + a\bar{x}^2$

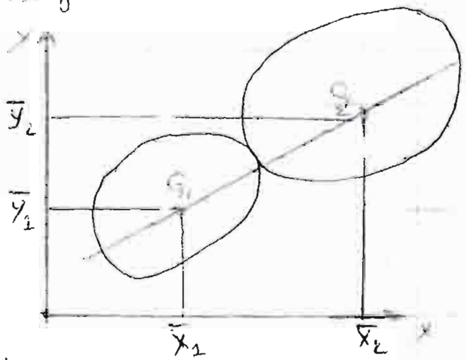
$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}}_{Cov(x,y)} - a\underbrace{\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2\right)}_{\sigma_x^2} = 0$

$$\boxed{a = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x^2}}$$

2. Ajustement par la méthode de Mayer :

Cette méthode consiste à diviser le nuage de points en 2 sous-nuages. La droite d'ajustement passe par les 2 centres de gravités G_1 et G_2 des 2 sous nuages.





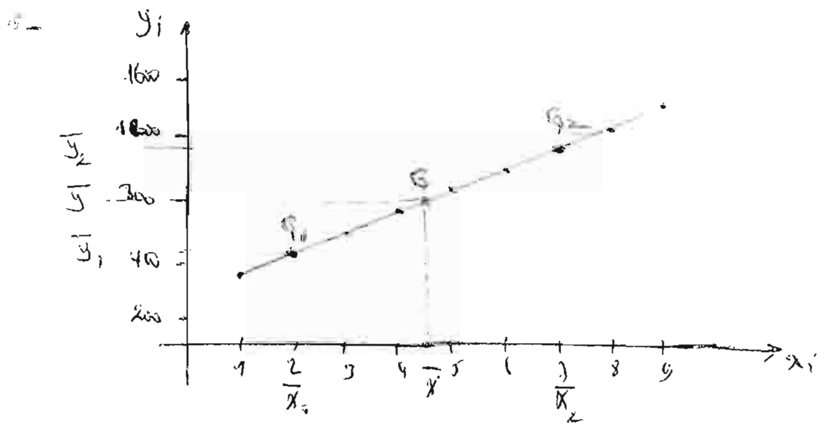
$Y = aX + b$

$(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \bar{y}_1 = a\bar{x}_1 + b$
$(\bar{x}_2, \bar{y}_e) = \bar{y}_2 = a\bar{x}_2 + b$ $\}= a, b$

TD : 06

Exo 2 :

1-



2- $G(\bar{x}, \bar{y}) = \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{45}{10} = 4,5$

$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{8681}{10} = 868,1$.

3- $G_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \bar{x}_1 = 2$; $\bar{y}_1 = 489,2$)

$G_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \bar{x}_2 = 7$; $\bar{y}_2 = 1247$.

4- La Droite $(G_1G_2) = y = ax + b$.

Ex : $y = 181,1\,x + 850$.

5- Les dépenses en 2005 $= y = 181,1 \times 15 + 850$

$(1990 \to 2005) = 15$

→ La méthode des moindres carrés - $y = ax + b$ = (mieux que Mayer)

• $a = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x^2}$ • $b = \bar{y} - a\bar{x}$

• $\mathrm{Cov}(x,y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}$ • $\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

TD 1: Dénombrement

Exercice 1

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes

1) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?

2) Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :

a) uniquement des hommes ;

b) des personnes de même sexe ;

c) au moins une femme et au moins un homme

Exercice 2

Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?

2) Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?

3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

Exercice 3

Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.

De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 4

Un homme a dans son garde-robe 4 pantalons, 5 chemises et 3 vestes. Il choisit au hasard un pantalon, une chemise et une veste. De combien de façons différentes peut-il s'habiller ?

Exercice 5

Supposons qu'une plaque d'immatriculation contient deux lettres distinctes suivies de trois chiffres dont le

Premier est différent de zéro. Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

Exercice 6

De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes?

Exercice 7

Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?
Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0?

Exercice 8

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

TD 2 : Calcul de probabilité et probabilité conditionnelle

Exercice 1

Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(A\cap B)=0,2$, $P(B)=0,4$ et $P(A/\underline{B})=0,3$.

i) Calculer $P(A)$.
ii) En déduire $P(A\cup B)$. iii) Calculer $P(B/\underline{A})$, $P(\underline{A}\cap\underline{B})$

Exercice 2

Soit un espace de probabilité muni de 3 événements A, B et C indépendants. Montrer que A est indépendant de $B\cup C$. $(A\cap(B\cup C))=(A\cap B)\cup(A\cap C))$

Exercice 3

Soient A et B deux événements d'un espace probabiliste Ω, vérifiant $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.40$ et

$P(A \mid B) = 0.25$

A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 4

Soient A et B deux événement d'un univers Ω tels que $p(A)=1/4$, $p(B)=1/3$ et $p(A\cup B)=23/60$

1- Calculer $p(A/B)$, $p(\bar{A}/B)$, $p(A\cap\bar{B}/B)$, $p(A\cap B/B)$, $p(A\cup B/A\cap\bar{B})$, et $p(B\cap\bar{A}/B\cup\bar{A})$
2- A et B sont-ils indépendants ? sont-ils incompatibles ?

Exercice 5

A et B sont deux événements d'un espace probabilisable Ω vérifiant

$p(\bar{A}) = 0.6$, $p(\bar{B}) = 0.7$, $p(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0.55$.

1- Calculer $P(A\cup B)$ et $P(A\cap B)$
2- Calculer la probabilité que A se réalise ou que B ne se réalise pas.

Exercice 6

Une entreprise fabrique des boulons. On admet que 3% des boulons présentent un défaut. On contrôle les boulons fabriqués, ce contrôle refuse 95% des boulons avec défauts et accepte 92% des boulons sans défauts. On choisit un boulon au hasard :

1- Sachant que le boulon est accepté quelle est la probabilité qu'il soit avec défaut ?
2- Sachant que le boulon est refusé quelle est la probabilité qu'il soit sans défaut ?
3- Calculer la probabilité de l'erreur dans le contrôle ?

Exercice 7

Un sac contient des jetons de couleurs différentes blancs (50%), verts (25%), jaunes (25%).

Les jetons peuvent êtres ronds ou carrés.

On choisit un jeton au hasard et en supposant que pour chaque couleur les jetons carrés et ronds sont équiprobables. Quelle est la probabilité qu'un jeton soit rond ?

TD3 : Variables aléatoires discrètes

Exo1

On joue à pile ou face avec 2 pièces. Soit X le nombre de piles obtenus. Décrire $X(\Omega)$. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exo2

Trois urnes A, B et C contiennent respectivement 1 boule blanche et 3 noires, 2 blanches et 2 noires, 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chacune des 3 urnes, et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues.
Donner la loi de X et sa fonction de répartition.

Exo3

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, d'espérance : $E(X) = -5$, $E(Y) = 3$ et de variance $V(X) = 4$, $V(Y) = 1$.

1. Calculer $E(-3X+2)$; $V(-3X+2)$.
2. Calculer $E((X+5)^2)$; $E(X^2)$; $E((X-1)^2)$.
3. Calculer $E(X+Y)$; $V(X+Y)$;

Exo4

Dans une bibliothèque se trouvent 10 livres en langue étrangère : 5 en anglais, 2 en allemand et 3 en russe. On prélève au hasard 5 de ces livres. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de volumes en russe prélevés. Déterminer la loi de probabilité, puis la fonction de répartition de X et représenter celle-ci.

Exo5

Un lot contient 3% de pièces défectueuses. On prélève au hasard un échantillon de 10 pièces. Les pièces étant très nombreuses, on admet que le tirage peut être considéré comme fait au hasard et avec remise.
Soit X la variable "nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon".
Déterminer la loi de X. Calculer $P(X=0)$, $P(X\geq 1)$ $E(X)$ et $\sigma(X)$

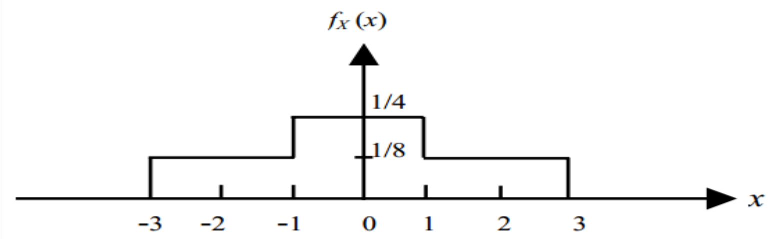
Exo6

Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte 10 questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule correcte. Un élève répond au hasard à chaque question du QCM. On note X le nombre de réponses correctes qu'il a données. Préciser la loi de probabilité suivie par X.
Quelle est la probabilité d'avoir 4 réponses correctes ?
Quelle est la probabilité d'avoir au moins 4 réponses correctes ?
Quelle est la probabilité d'avoir au plus 4 réponses correctes ?

TD4 : Variables aléatoires continues

Exo1

Considérons la VA continue dont la densité de probabilité est donnée par la figure suivante :



Calculer E[X], σ[X], $\boldsymbol{F_x(x)}$

Exo2

La durée de fonctionnement d'un ordinateur avant sa première panne est une variable aléatoire continue de densité de probabilité donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Quelle est la probabilité que cette durée de fonctionnement soit comprise entre 50 et 150 heures? Quelle est la probabilité que l'ordinateur fonctionne moins de 100 heures?

Exo3

A partir de 7 heures, les bus passent toutes les 15 minutes à un arrêt donné. Ils passent donc à 7 h 00, 7 h 15, 7 h 30 et ainsi de suite. Un usager se présente entre 7 h 00 et 7 h 30 à cet arrêt, l'heure exacte de son arrivée étant une variable uniforme sur cette période. Trouver la probabilité qu'il doive attendre moins de 5 minutes, puis plus de 10 minutes.

Exo4

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 1/10$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un passe juste devant vous. Avec quelle probabilité devrez-vous attendre

• plus de 10 minutes?

• entre 10 et 20 minutes?

Exo5

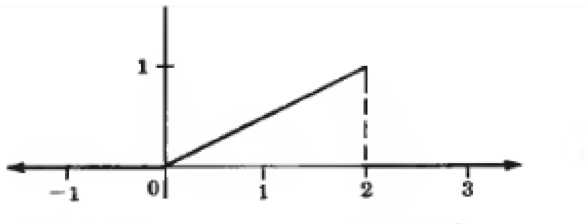
La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :

a. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur [0 ; +∞[par f(t)=e–0,01t
b. Pour tout réel t positif, on a : P(Y≤t) = 1– e–0,01t
c. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est égale à 0,16 au centième près
d. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute

Exo6

Soit X une variable aléatoire continue ayant la fonction de distribution suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Représentation graphique de f

Calculer et représenter $F_x(X)$

TD 5 : Statistique descriptive

Exercice 1

- Le tableau suivant donne la répartition selon le groupe sanguin de 40 individus pris au hasard dans une population,

Groupes sanguins	*A*	*B*	*AB*	*O*
L'effectif	*20*	*10*	n_3	*5*

1 Déterminer la variable statistique et son type.

2. Déterminer l'effectif des personnes ayant un groupe sanguin AB.

3. Donner toutes les représentations graphiques possibles de cette distribution.

Exercice 2

- Le gérant d'un magasin vendant des articles de consommation courante a relevé pour un article particulier qui semble connaître une très forte popularité, le nombre d'articles vendus par jour. Son relevé a porté sur les ventes des mois de Mars et Avril, ce qui correspond à 52 jours de vente. Le relevé des observations se présente comme suit :

7 13 8 10 9 12 10 8 9 10 6 14 7 15 9 11 12 11 12 5 14 11 8 10 14 12 8

5 7 13 12 16 11 9 11 11 12 12 15 14 5 14 9 9 14 13 11 10 11 12 9 15.

1. *Quel type est la variable statistique étudiée.*
2. *Déterminer le tableau statistique en fonction des effectifs, des fréquences, des effectifs cumulés et des fréquences cumulés.*
3. *Tracer le diagramme des bâtonnés associé à la variable* X.
4. *Soit* F_x *la fonction de répartition. Déterminer* F_x.
5. *Calculer le mode Mo et la moyenne arithmétique* $\overline{x}$.
6. *Déterminer à partir du tableau puis à partir du graphe, la valeur de la médiane Me.*
7. *Calculer la variance et l'écart-type.*

Exercice 3

- On considère deux groupes d'étudiants. Nous relevons leurs notes d'examens dans les deux tableaux suivants :

Note (groupe A)	8	9	10	11
Effectif	2	2	1	1

Note (groupe B)	6	8	9	13	14
Effectif	2	2	2	1	1

Calculer la moyenne et l'écart type de chaque groupe. Comparer les deux groupes.

TD 6 : Statistique descriptive bidimensionnelle

Exercice 1

Le prix de revente y d'un type de machine est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i (en DA)	3000	2400	1920	1356	1229	983

1. Représenter le nuage de point $M_i(x_i, y_i)$ associé à la série statistique (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal convenable.
2. Calculer le pourcentage de dépréciation du prix de revente après les trois premières années.
3. Donner une équation de la droite de régression D par la méthode des moindres carrés.
4. On pose $z = \ln y$ et on admet qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par : $z = -0{,}22x + 8{,}01$. Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $y = A^x \times B$ (A et B sont des réels).
5. En admettant que $y = 0{,}80^x \times 3011$, déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 500DA.
6. Après six années d'utilisation le prix de revente d'une machine est de 780 DA. Des deux ajustements précédents, quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après six années d'utilisation ? argumenter la repense.

Exercice 2

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1999 :

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépense y_i	398	451	423	501	673	956	1077	1285	1427	1490

- ✓ Dessiner le nuage de points M_i (x_i; y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal avec, pour unités graphiques 1 cm pour un rang en abscisse, 1cm pour 200 millions d'euros en ordonnée.
- ✓ Déterminez les coordonnées de **G**, point moyen de nuage. Placez le point **G**.

1. ***Méthode de la droite de Mayer***
   - ✓ Déterminer les coordonnées de G1 et G2.
   - ✓ Placez ces points sur le graphique précédent et tracez la droite (G1G2). Le point G appartient-il à cette droite ?
   - ✓ Donnez l'équation de la droite (G1G2) sous la forme ***y=ax+b*** (on arrondira les coefficients à 0,1 prés).
   - ✓ En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision sur les dépenses de l'année 2005.
2. ***Ajustement par la méthode des Moindres Carrés***
   - ✓ Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x , sous la forme ***y=mx+p*** par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis à 0,1 près*).
   - ✓ Représenter D dans le repère précédent.
   - ✓ En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision sur les dépenses de l'année 2005.